1. Описание линейной диагностической бароклинной модели океана

1.1 Постановка задачи

Требуется провести диагностические расчеты морских течений на основе различных океанографических данных. Для решения этой задачи применяется модифицированная квазигеострофическая модель [5] в которой отсутствует завышенная роль рельефа дна.

Математическая постановка задачи:

Рассматривается бассейн с произвольными формами рельефа дна и контура береговых очертаний, заполненный бароклинной жидкостью. В качестве исходных данных имеем:

а) двухмерное поле касательных трения ветра.

б) трехмерное поле плотности (или солености и температуры, при помощи которых рассчитывается плотность).

в) рельеф дна и контур берега.

Требуется рассчитать составляющие скорости трехмерного поля морских течений, исходя из заданных выше перечисленных данных.

При выводе основных уравнений модели использовался эйлеровый подход.

1.2 Уравнения модели

Для расчета трех составляющих скоростей течений используется система уравнений, включающая:

Упрощенные уравнения движения [9]:

$$u = -\frac{1}{\rho_0 l}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{e^{-\alpha z}}{2\rho_0 \nu\alpha}((\tau_x+\tau_y)\cos(\alpha z) + (-\tau_x+\tau_y)\sin(\alpha z)) - \\ -\frac{e^{\alpha(z-H)}}{\rho_0 l}(-\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{z=H}\cdot\cos(\alpha(z-H)) - \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{z=H}\cdot\sin(\alpha(z-H))) \tag{1}$$

$$v = \frac{1}{\rho_0 l}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{e^{-\alpha z}}{2\rho_0 \nu\alpha}((-\tau_x+\tau_y)\cos(\alpha z) - (\tau_x+\tau_y)\sin(\alpha z)) - \\ -\frac{e^{\alpha(z-H)}}{\rho_0 l}(\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{z=H}\cdot\cos(\alpha(z-H)) - \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{z=H}\cdot\sin(\alpha(z-H))) \tag{2}$$

Где:

$$p = \rho_0 \cdot g \cdot \zeta + g \cdot \int_0^z \rho dz \qquad (3)$$

уравнения неразрывности несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

Уравнение уровня, полученные при помощи интегрирования по вертикали линеаризированных уравнений движения [2,3,5]:

$$\Delta\zeta + \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0 H}\int_0^H (H-z)\Delta\rho dz -$$
$$-\frac{1}{\rho_0 H}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\int_0^H \frac{\partial \rho}{\partial x}dz + \frac{\partial H}{\partial y}\int_0^H \frac{\partial \rho}{\partial y}dz\right) + \frac{l}{gH}\int_0^H \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dz - \frac{\beta}{gH}\int_0^H udz + \frac{div\left(\tau + \tau^H\right)}{gH\rho_0} \qquad (5)$$

Граничные условия.

На поверхности, при $z = -\zeta_1(x, y, t)$:

$$p_1 = p_a \qquad (6)$$

$$\rho_0 \cdot \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x \qquad (7)$$

$$\rho_0 \cdot \nu \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y \qquad (8)$$

$$w = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 \cdot H}\int_0^H (H-z)\frac{\partial \rho_1}{\partial x}dz + \frac{l}{g \cdot H}\int_0^H vdz - \frac{1}{g \cdot H}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} + \frac{1}{g \cdot H}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0 \cdot H}\int_0^H (H-z)\frac{\partial \rho_1}{\partial y}dz - \frac{l}{g \cdot H}\int_0^H udz - \frac{1}{g \cdot H}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} + \frac{1}{g \cdot H}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H} \qquad (11)$$

На боковых границах и дне приняты условия прилипания.

В уравнениях приняты следующие обозначения:

u, v, w – составляющие скорости течения по осям x, y и z декартовой системы координат; ось x направлена на восток, ось y на север, ось z направлена вертикально вниз (см/сек).

t – время (сек)

ρ_0 – средняя плотность воды (г/см^3)

p_1 – давление в морской воде (паскаль)

p – аномалии давления в морской воде (паскаль)

ρ_1 – плотность воды (г/см^3)

υ - коэффициент вертикальной турбулентной вязкости (см^2/сек)

μ - коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости (см^2/сек)

ρ - аномалия плотности (г/см^3)

p_a – атмосферное давление на уровне моря (паскаль)

τ_x , τ_y – составляющие касательного трения ветра (г/(см*сек^2))

ζ_1 – возвышение свободной поверхности океана (см.)

$\zeta = \zeta_1 + \dfrac{p_a}{\rho_0 \cdot g}$ - приведенный уровень океана, положительные значения ζ_1 и ζ соответствуют возвышению уровня океана (см.)

$\alpha' = \sqrt{\dfrac{\omega \cdot \sin(\varphi)}{\nu'}}$ параметр Экмана для атмосферы (1/см)

$\grave{\nu}$ - коэффициент вертикальной турбулентной вязкости для атмосферы

ω – угловая скорость вращения Земли (сек$^{-1}$)

φ - широта.

H – рельеф океана (см)

g – ускорение свободного падения (см/сек^2)

$l = 2 \cdot \omega \cdot \sin(\varphi)$ - параметр Кориолиса (1/сек)

$\beta = \dfrac{dl}{dy}$ - изменение параметра Кориолиса с широтой (1/(см*сек))

Δ - оператор Лапласа

1.3 Методы аппроксимации и решения уравнений

При решении гидродинамической задачи конечно-разностными методами рассматриваемый бассейн аппроксимируется сеточной областью с прямоугольными ячейками, в узлах которой задаются значения исходных полей и определяются значения искомых характеристик. Граница бассейна при этом аппроксимируется ломаной линией, отрезки которой параллельны соответствующим осям координат. В работе рассматриваются сетки с прямоугольными ячейками как внутри области, так и районе границы.

Рассмотрим двухмерную область (x×y) длина по оси Ox равна X, длина по оси Oy равна Y, разобьем сетку G^h, шаги которой по оси Ox равен Δx, по оси Oy равен Δy. Число узлов сетки вдоль оси Ox равно n, число узлов сетки вдоль оси Oy равно m. Очевидно, что $(n-1)\cdot\Delta x = X$ и $(m-1)\cdot\Delta y = Y$.

Обратимся к уравнению (5):

$$\Delta\zeta + b\frac{\partial\zeta}{\partial x} + c\frac{\partial\zeta}{\partial y} = F \tag{12}$$

Где:

$$b = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x} \qquad c = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial y},$$

$$F = -\frac{1}{\rho_0 H}\int_0^H (H-z)\Delta\rho dz - \frac{1}{\rho_0 H}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\int_0^H \frac{\partial\rho}{\partial x}dz + \frac{\partial H}{\partial y}\int_0^H \frac{\partial\rho}{\partial y}dz\right) +$$

$$+\frac{l}{gH}\int_0^H\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dz - \frac{\beta}{gH}\int_0^H u dz + \frac{div\left(\tau + \tau^H\right)}{gH\rho_0}$$

Перепишем (12) в следующем виде:

$$\Delta\zeta + b^{(0)}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + c^{(0)}\frac{\partial\zeta}{\partial y} = F^{(0)} \tag{13}$$

Для решения этого уравнения будем использовать метод Гаусса-Зейделя [1,6]. Сущность его в следующем. Производные первого порядка заменяются разностями, направленными в зависимости от знаков коэффициентов таким образом, чтобы диагональные члены матрицы коэффициентов обладали максимальными весами. Например, в правой части уравнении (13) заменим производную по x направленным разностным отношением следующим образом [7]:

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\delta_1\cdot\zeta_{i+1,j} + (1-2\delta_1)\cdot\zeta_{i,j} + (\delta_1-1)\cdot\zeta_{i-1,j}}{\Delta x}, \text{ где } \delta_1 = \begin{cases} 0, \text{ ï ðè } b_{i,j}^{(0)} \le 0 \\ 1, \text{ ï ðè } b_{i,j}^{(0)} \ge 0 \end{cases} \tag{14}$$

Точно так же будет для y:

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{\delta_2\cdot\zeta_{i,j+1} + (1-2\delta_2)\cdot\zeta_{i,j} + (\delta_2-1)\cdot\zeta_{i,j-1}}{\Delta y}, \text{ где } \delta_2 = \begin{cases} 0, \text{ ï ðè } c_{i,j}^{(0)} \le 0 \\ 1, \text{ ï ðè } c_{i,j}^{(0)} \ge 0 \end{cases} \tag{15}$$

Если теперь записать конечно-разностный аналог суммы $b^{(0)}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+c^{(0)}\frac{\partial\zeta}{\partial y}$, то в этой сумме $\zeta_{i,j}$ будет иметь коэффициент $-\left[\left|b_{i,j}^{(0)}\right|+\left|c_{i,j}^{(0)}\right|\right]$, то есть независимо от знаков коэффициентов $b_{i,j}^{(0)}$ и $c_{i,j}^{(0)}$ в полученной системе алгебраических уравнений будет иметь место диагональное преобладание [7].

В левой части уравнения (13) первые производные заменяем центральными разностями. Оператор Лапласа также заменяется центральными разностными отношениями:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=\frac{\zeta_{i+1,j}+\zeta_{i-1,j}-2\cdot\zeta_{i,j}}{\Delta x^2};\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=\frac{\zeta_{i,j+1}+\zeta_{i,j-1}-2\cdot\zeta_{i,j}}{\Delta y^2} \tag{16}$$

После указанных преобразований получим следующую разностную аппроксимацию уравнения (13) на сетке G^{h} с шагами Δx и Δy:

$$\begin{aligned}&\frac{\zeta_{i+1,j}+\zeta_{i-1,j}-2\cdot\zeta_{i,j}}{\Delta x^2}+\frac{\zeta_{i,j+1}+\zeta_{i,j-1}-2\cdot\zeta_{i,j}}{\Delta y^2}+\\&+b_{i,j}^{(0)}\cdot\left(\frac{\delta_1\cdot\zeta_{i+1,j}+(1-2\cdot\delta_1)\cdot\zeta_{i,j}+(\delta_1-1)\cdot\zeta_{i-1,j}}{\Delta x}\right)+\\&+c_{i,j}^{(0)}\cdot\left(\frac{\delta_2\cdot\zeta_{i,j+1}+(1-2\cdot\delta_2)\cdot\zeta_{i,j}+(\delta_2-1)\cdot\zeta_{i,j-1}}{\Delta y}\right)=F_{i,j}^{(0)},\end{aligned} \tag{17}$$

коэффициенты $b_{i,j}^{(0)}$ и $c_{i,j}^{(0)}$ заменяются центральными разностными отношениями:

$$b_{i,j}^{(0)}=\frac{1}{H_{i,j}}\frac{H_{i+1,j}-H_{i-1,j}}{2\Delta x};\qquad c_{i,j}^{(0)}=\frac{1}{H_{i,j}}\frac{H_{i,j+1}-H_{i,j-1}}{2\Delta y} \tag{18}$$

Перепишем граничные условия (10) (11) в следующем виде [4,8]:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=f_1(x,y),\\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}=f_2(x,y).\end{cases} \tag{19}$$

Воспользуемся методом, состоящем в следующем: записываем конечно-разностные соотношения граничных условий

$$\begin{cases}\zeta_{i+1,j}-\zeta_{i,j}=\Delta x\cdot\varphi^1_{i+1/2,j}\left(j=0,m\right)\\ \zeta_{i,j+1}-\zeta_{i,j}=\Delta y\cdot\varphi^2_{i,j+1/2}\left(i=0,n\right)\end{cases} \tag{20}$$

Где

$$\varphi^1_{i+1/2,j} = \left(f_1(x,y)\right)_{i+1/2,j},$$
$$\varphi^2_{i,j+1/2} = \left(f_2(x,y)\right)_{i,j+1/2}. \qquad (21)$$

Здесь нормальные производные учитываются последовательными приближениями. Составляя разности из соотношений (20), получим эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} \zeta_{i+1,j} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j} = \Delta x \cdot \left(\varphi^1_{i+1/2,j} - \varphi^1_{i-1/2,j}\right)\left(j = 0, m\right) \\ \zeta_{i,j+1} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1} = \Delta y \cdot \left(\varphi^1_{i,j+1/2} - \varphi^1_{i,j-1/2}\right)\left(i = 0, n\right) \end{cases} \qquad (22)$$

Решение будем производить по следующей схеме:

1. Точки поверхности разделяем на три следующих типа: граничные, приграничные и внутренние. К граничным точкам (i, j) относятся те, для которых хотя бы одна из точек $(i \pm 1, j)$, $(i, j \pm 1)$ не принадлежит бассейну. К приграничным точкам (i, j) относятся те, для которых хотя бы одна из точек $(i \pm 1, j)$, $(i, j \pm 1)$ является граничной. Внутренними точками являются все остальные точки поверхности бассеина.
2. С помощью метода Гаусса-Зейделя ищем значения уровня в приграничных точках, пользуясь уравнением (19). В произвольной приграничной точке (называемой реперной) задаем нулевое значение уровня.
3. Значения уровня во внутренних точках находим, используя уравнение (17) и полученные ранее значения в приграничных точках [3,4].

Таким образом решение задачи Неймана сводится к нахождению значений уровня на границе с последующим решением задачи Дирихле.

При численном решении задачи Неймана возникает разбаланс из-за погрешности конечно-разностной схемы. Для уменьшения величины разбаланса к правой части уравнения (5) прибавляется проинтегрированное по вертикали от поверхности до дна уравнение неразрывности (4). Таким образом, в правой части уравнения (5) появляется такой множитель [2]:

$$\frac{l}{gH}\int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz \qquad (23)$$

Для расчета горизонтальных составляющих скорости течений используем численный аналог уравнений (1) (2), для дискретизации первых производных в правой части уравнений используются центральные разности.

Отдельно остановимся на определении вертикальной компоненты скорости течения. Используем оба граничных условия по z для w. Для этого продифференцируем уравнения неразрывности по z:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \qquad (24)$$

При решении используются условия прилипания на дне и на поверхности. Численный аналог (24) формируется при помощи центрально-разностных схем второго порядка точности [5], производная второго порядка для z заменяется центральным разностным отношением, полученная система линейный уравнений решается методом Гаусса-Зейделя [1,6].